

# Analyse und Computersimulation großstädtischer Agglomerationen <sup>†</sup>

Frank Schweitzer, Jens Steinbrink

*Institut für Physik der Humboldt-Universität, Invalidenstrasse 110, 10115 Berlin*  
*e-mail: schweitzer@physik.hu-berlin.de*

## 1 Analyse der Rang-Größen-Verteilung urbaner Agglomerationen

Von einem physikalischen Standpunkt aus lassen sich urbane Agglomerationen, wie Städte mit den sie umgebenden Satellitensiedlungen, Gewerbegürtel oder Ballungsgebiete, als eine besondere Art von *Clustern* auf einer zweidimensionalen Oberfläche interpretieren. In einer Schwarz-Weiß-Rasterung werden diese Cluster durch die bebaute Fläche abgebildet (schwarzer Pixel = bebaute Flächeneinheit, weißer Pixel = unbebaute Flächeneinheit), wobei die unterschiedliche Bebauung (ein Hochhaus im Gegensatz zu einer Garage) zunächst einmal unberücksichtigt bleibt. Aus derartigen "Schwarzplänen" werden dann einer quantitativen Analyse die strukturellen Eigenschaften der urbanen Cluster ermittelt.

Urbane Aggregate stellen in der Regel keine zusammenhängende Struktur dar, sondern werden aus sehr vielen einzelnen Clustern unterschiedlicher Größe gebildet. Durch eine Clusteranalyse ergibt sich die Möglichkeit, diese Zusammensetzung festzustellen. Anschließend werden die Cluster entsprechend ihrer Größe nach Rängen sortiert (der größte Cluster erhält Rang 1 usw.).

In Abb. 1 ist für (a) Berlin und (b) München die Zeitentwicklung der Größenverteilung zusammenhängender Bebauungsflächen (Cluster) über dem Rang in doppelt-logarithmischer Auftragung dargestellt.

Abb. 1 zeigt, insbesondere für die Entwicklung Berlins, daß sich die Rang-Größen-Verteilung mit der Zeit, also mit zunehmender Ausdifferenzierung des Stadtclusters, einem Potenzgesetz nähert, das in Abb. 1 durch eine Gerade charakterisiert ist [Schweitzer, Steinbrink, 1994, 1997, 1998]. Bezeichnet man die Größe des Clusters mit  $N$  und seinen Rang mit  $q$ , dann gilt:

$$\log N(q) = \log N(1) + \alpha \log q \quad \text{bzw.} \quad N(q) = N(1)q^\alpha; \quad \alpha < 0 \quad (1)$$

wobei  $N(1)$  die Größe des Clusters mit dem Rang 1 ist und praktisch als Normierung dient.

---

<sup>†</sup>Der Beitrag erschien in der Fassung von 1995.

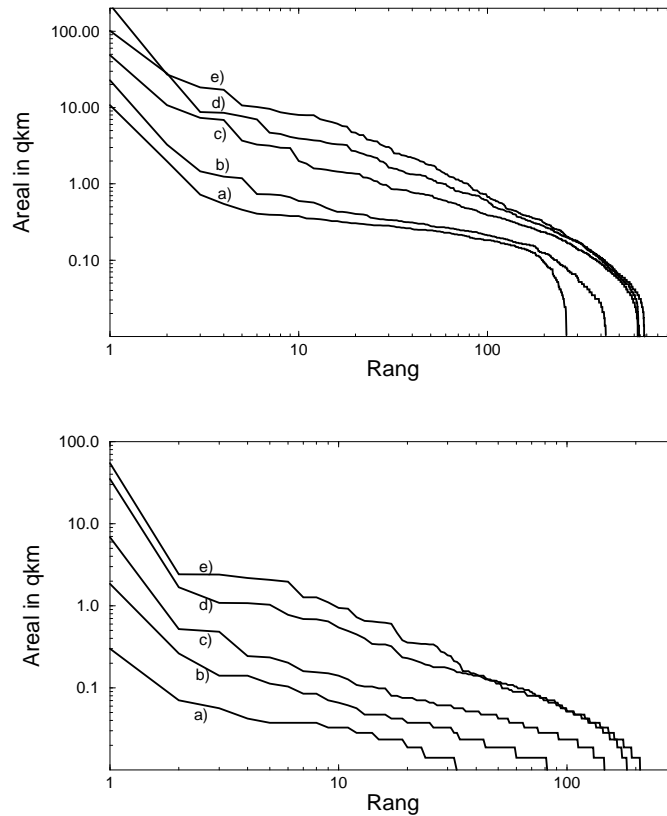


Abbildung 1: Zeitentwicklung der Rang-Größen-Verteilung zusammenhängender Bebauungsflächen in doppelt-logarithmischer Darstellung: oben: Berlin (a: 1800, b: 1875, c: 1910, d: 1920, e: 1945), unten: München (a: 1800, b: 1850, c: 1900, d: 1950, e: 1965)

Dieses Potenzgesetz ist auch als PARETO-Verteilung bekannt [Frankhauser, 1991, Günther, Shapiro, Wagner, 1992], der Parameter  $\alpha$  ist der PARETO-Exponent. Es ist charakteristisch für hierarchisch aufgebaute Systeme; das heißt im vorliegenden Fall, die urbane Struktur wird mit der Zeit hierarchisch durch Cluster aller Größen aufgebaut.

Wenn die Entwicklung urbaner Aggregate so erfolgt, daß sich ihre Clusterverteilung mit der Zeit einer PARETO-Verteilung annähert, dann kann das Erreichen dieser Verteilung als ein Maß für ein entwickeltes urbanes Aggregat angesehen werden - und im Gegenzug der Abstand von dieser Verteilung als ein Maß für die aus struktureller Sicht noch zur Verfügung stehenden Entwicklungspotenzen.

Unsere Untersuchungen haben gezeigt, daß die PARETO-Exponenten für die Bebauungsflächen verschiedener Großstädte vergleichbare Werte haben [Schweitzer, Steinbrink, 1997, 1998]. Das heißt, daß der PARETO-Exponent könnte, im Rahmen gewisser Fehlerabschätzungen, neben der fraktalen

Dimension als ein weiteres *universales Maß für entwickelte urbane Agglomerationen* angesehen werden.

## 2 Stochastische Beschreibung des Wachstums urbaner Agglomerationen

Für die physikalische Beschreibung urbaner Agglomerationen führen wir eine Cluster-Größen-Verteilung  $\mathbf{n}$  ein:  $\mathbf{n} = \{n_1, n_2, \dots, n_k, \dots, n_A\}$ . Hierbei ist  $n_k$  die Größe, (also die Zahl schwarzer Pixel), des Cluster mit der Nummer  $k$ , wobei insgesamt  $A$  Cluster vorhanden sind ( $k = 1, \dots, A$ ). Die Gesamtzahl aller Pixel ergibt sich durch Aufsummation:

$$N_{tot}(t) = \sum_{k=1}^A n_k \quad (2)$$

und wird in einer sich entwickelnden urbanen Aggregation mit der Zeit anwachsen. Anhand der Analyse Berlins haben wir einen annähernd exponentiellen Zuwachs von der Gründerzeit (1875) bis 1945 festgestellt [Schweitzer, Steinbrink, 1997, 1998].

Die Clusterverteilung  $\mathbf{n}$  kann durch zwei elementare Prozesse verändert werden: (1) die Bildung neuer Cluster, (2) das Wachstum vorhandener Cluster [Schweitzer, Steinbrink, 1997, 1998]. Prinzipiell müßten auch noch das Schrumpfen bzw. das Verschwinden bereits existierender Cluster berücksichtigt werden, allerdings ist die Wahrscheinlichkeit dieser Prozesse bei zunehmendem urbanen Wachstum relativ klein, so daß sie hier vernachlässigt werden.

Die Bildung neuer Cluster kann durch die symbolische Reaktion  $A \xrightarrow{w_1} A + 1$  für die Gesamtzahl  $A$  der Cluster ausgedrückt werden. Die Wahrscheinlichkeit für diesen Prozeß,  $w_1$ , wird prinzipiell vom Gesamtwachstum,  $N_{tot}(t)$ , der urbanen Agglomeration, abhängen:

$$w_1 = w(A + 1, t + 1 | A, t) = c(N_{tot}) \quad (3)$$

Im folgenden wollen wir allerdings eine konstante Wahrscheinlichkeit für die Neubildung annehmen:  $c = const.$ .

Das Wachstum bereits vorhandener Cluster kann durch die symbolische Reaktion  $n_k \xrightarrow{w_k} n_k + 1$  für die Größe  $n$  des Clusters  $k$  ausgedrückt werden. Die Wahrscheinlichkeit für diesen Prozeß,  $w_k$ , wird von der bereits vorhandenen Größe des Clusters  $n_k$  und von der existierenden Clusterverteilung abhängen:

$$w_k = w(n_k + 1, t + 1 | n_k, t) = \gamma \frac{n_k}{N_{tot}}, \quad \gamma = 1 - c(N_{tot}) \quad (4)$$

Über die Abhängigkeit der Wachstumswahrscheinlichkeit von  $N_{tot}(t)$  existiert eine *globale Kopplung*, das heißt, das Wachstum eines bestimmten Clusters ist nicht unabhängig von den anderen Clustern des urbanen Aggregates.

Über den Faktor  $\gamma$  wird das Verhältnis zwischen der Bildung neuer und dem Wachstum vorhandener Cluster bewichtet. Der Wert von  $\gamma$  entscheidet darüber, ob sich das urbane Wachstum vorwiegend durch Bildung neuer Cluster oder durch Wachstum vorhandener Cluster vollziehen wird.

Da die Entwicklung der urbanen Agglomeration durch eine Vielzahl von Wachstums- und Neubildungsprozessen der Cluster bestimmt wird, die parallel ablaufen können, ist das Ergebnis der Entwicklung nicht eindeutig vorherstimmt. An die Stelle einer deterministischen Beschreibung muß daher eine *probabilistische* Beschreibung treten, die der Offenheit der Zukunft und der eingeschränkten Vorhersagbarkeit der Entwicklung Rechnung trägt. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung  $P(\mathbf{n}, t) = P(n_1, n_2, \dots, n_k, \dots, n_A, t)$  gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine beliebige mögliche Verteilung  $\{n_1, n_2, \dots, n_k, \dots, n_A\}$  nach einer bestimmten Zeit angetroffen wird. Die zeitliche Veränderung dieser Wahrscheinlichkeit wird durch eine *Master-Gleichung* beschrieben:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(\mathbf{n}, t)}{\partial t} = & - \sum_i w_k(n_k, t) P(n_1, \dots, n_k, \dots, t) \\ & + \sum_{i \neq 1} w_k(n_k - 1, t) P(n_1, \dots, n_k - 1, \dots, t) \\ & - w_1(A, t) P(n_1, \dots, n_A, t) \\ & + w_1(A - 1, t) P(n_1, \dots, n_{A-1}, t) \end{aligned} \quad (5)$$

Diese Mastergleichung wird mit Hilfe von Computer-Simulationen gelöst. Eine analytische Lösung für die Mastergleichung wird gefunden, wenn man die globale Kopplung, ausgedrückt durch Gleichung (2), vernachlässigen kann. Dies ist möglich unter der Annahme:  $1 \ll A \ll N_{tot}$ , was im wesentlichen eine Einschränkung für die Wahrscheinlichkeit der Neubildung von Clustern bedeutet, die klein genug sein muß. In diesem Fall läßt sich die Mastergleichung zerlegen, und man kann die mittlere Clustergröße eines Clusters  $k$  zu einer bestimmten Zeit berechnen. Das Resultat [Günther, Shapiro, Wagner, 1992]:

$$\langle n_k(t) \rangle \sim N_{tot} k^{-(1-c)} \quad (6)$$

beschreibt eine exponentielle Abhängigkeit zwischen der Größe eines Clusters,  $n_k$  und seiner Nummer,  $k$ , wie wir sie bereits bei der PARETO-ZIPF-Verteilung, Gl. (1), diskutiert haben, wobei der PARETO-Exponent  $\alpha$  hier  $\alpha = c - 1 < 0$  ist. Das heißt, die Clusterverteilung, deren Änderung durch die Mastergleichung, Gl. (5), beschrieben wird, entwickelt sich im Mittel so, daß Cluster aller Größen vorkommen, die den Siedlungskörper, das urbane Aggregat, hierarchisch zusammensetzen.

Dabei wird die Steilheit der PARETO-ZIPF-Verteilung wesentlich von der Wahrscheinlichkeit für die Neubildung von Clustern bestimmt. Je kleiner  $c$  ist, um so steiler wird die Verteilung, was auf eine stärkere Hierarchisierung schließen läßt, wobei das Wachstum des größten Clusters die Hauptrolle spielen wird.

### 3 Computersimulation der Rang-Größen-Verteilung urbaner Agglomerationen

Die Mastergleichung (5) wird durch eine stochastische Simulation des urbanen Wachstums gelöst. Während der Simulation müssen, zusätzlich zu den globalen Kopplungen, auch lokale Wechselwirkungen zwischen den Clustern berücksichtigt werden; das heißt, die Cluster können mit Nachbarclustern zusammenwachsen - ein Effekt, der in der Physik als Koagulation bezeichnet wird. Dieser Effekt kann im Spätstadium der urbanen Entwicklung sehr schnell zu einem vollkommen zusammenhängenden Cluster führen (Perkolation), falls sich das Wachstum *aller* Cluster ungehindert nach Gl. (4) vollzieht.

Eine solche Entwicklung urbaner Aggregate ist aber empirisch kaum festgestellt worden. Statt dessen findet man selbst bei großen Agglomerationen immer noch separate Cluster, das heißt, daß in unserem Modell die angegebenen Wachstumswahrscheinlichkeiten im Spätstadium der Entwicklung zumindest für Cluster mit niedrigen Rängen modifiziert werden müssen.

Unsere Computersimulationen haben gezeigt, daß zwei unterschiedliche kinetische Regimes für die Entwicklung urbaner Agglomerationen existieren:

- (i) ein Frühstadium, in dem die Wachstums- und Neubildungsprozesse aller Cluster entsprechend Gl. (3, 4) ablaufen,
- (ii) ein Spätstadium, in dem das eigenständige Wachstum des größten Clusters (Rang 1) ausgebremst wird und statt dessen Koagulationsprozesse dominieren. Kleinere Cluster wachsen allerdings weiter entsprechend Gl. (4)

Als reales Beispiel wurde die Entwicklung der Rang-Größen-Verteilung einer urbanen Agglomeration im Spätstadium simuliert [Schweitzer, Steinbrink, 1997, 1998]. Als Ausgangszustand diente uns der urbane Cluster Berlin (1910). Simuliert wurde die Entwicklung Berlins von 1910 bis 1945.

Unsere Simulationen zeigen, daß die PARETO-Verteilung für den Ballungsraum Berlin tatsächlich reproduziert werden, wenn man annimmt, daß der Cluster vom Rang 1 nicht mehr selbst wächst, sondern nur noch durch Koagulation mit anderen Clustern, während die Cluster ab Rang 2 proportional ihrer bisherigen Größe wachsen (Abb. 2).

Allerdings wird im Rahmen dieses Modells keine Aussage darüber gegeben, *warum* und *wann* der größte Cluster sein eigenständiges Wachstum ausbremst; wann also der Übergang zwischen Stadium (i) und (ii) erfolgt. Eine Erklärung dafür liefert ein Modell, daß auf rückgekoppelten Reaktions-Diffusions-Gleichungen basiert und daß die Kinetik der urbanen Entwicklung detaillierter beschreiben kann [Schweitzer, Steinbrink, 1997]

Die Übereinstimmung zwischen der Computersimulation und der realen Rang-Größen-Verteilung besagt, daß die Entwicklung der Größenverteilung der verschiedenen Cluster richtig beschrieben wurde. Damit ist allerdings nur eine Aussage darüber gegeben, um welchen Betrag ein Cluster einer bestimmten Größe während dieses Zeitintervalls wächst, unabhängig von seinem konkreten

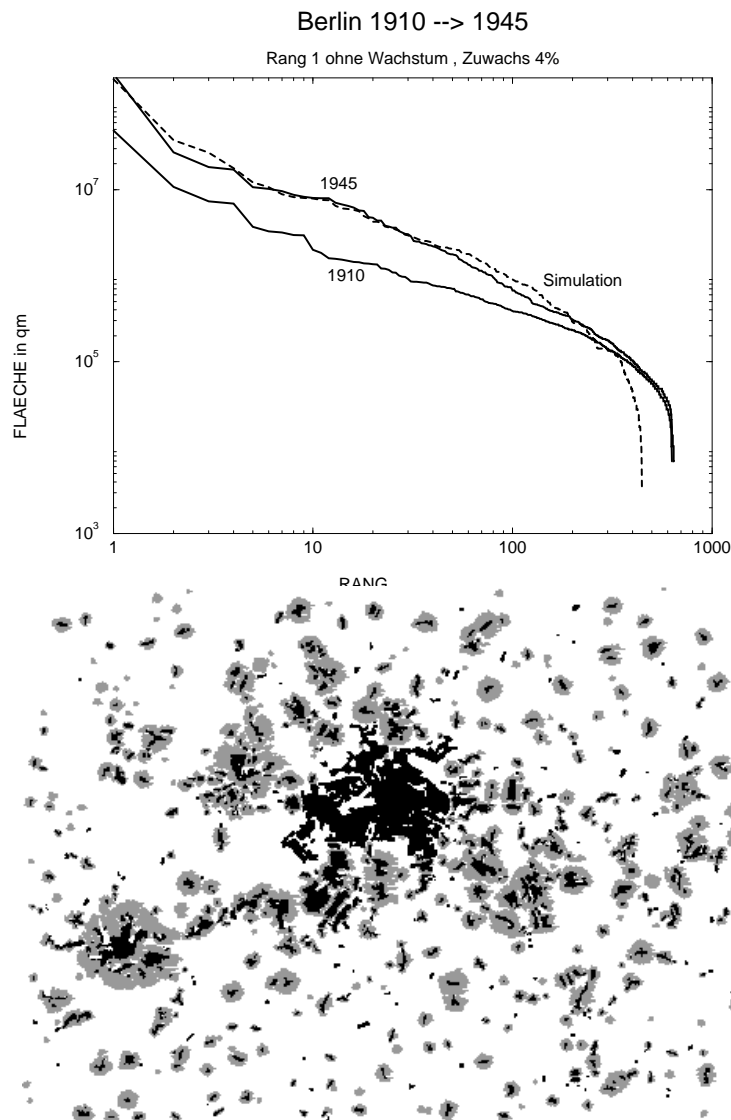


Abbildung 2: oben: Simulation der Rang-Größen-Verteilung der Cluster (Berlin 1910 - 1945), unten: Simulierte räumliche Verteilung der Cluster (Berlin 1945), Schwarz: Ausgangszustand (Berlin 1910), Grau: Simulierte Zuwachsflächen

Platz im realen urbanen Cluster Berlin. Die Simulation ist nicht in der Lage, die reale räumliche Verteilung der Cluster für den Raum Berlin zu reproduzieren, weil in die kinetischen Annahmen keine Ortskoordinaten eingehen.

Das vorgestellte Modell erlaubt es auch, Zukunftsprognosen für die Entwicklung urbaner Agglomerate aufzustellen, Als ein Beispiel haben wir die Entwicklung der koreanischen Großstadt Daegu

von 1988 bis 2010 simuliert (Abb. 3)[Schweitzer, Steinbrink, 1997, 1998].

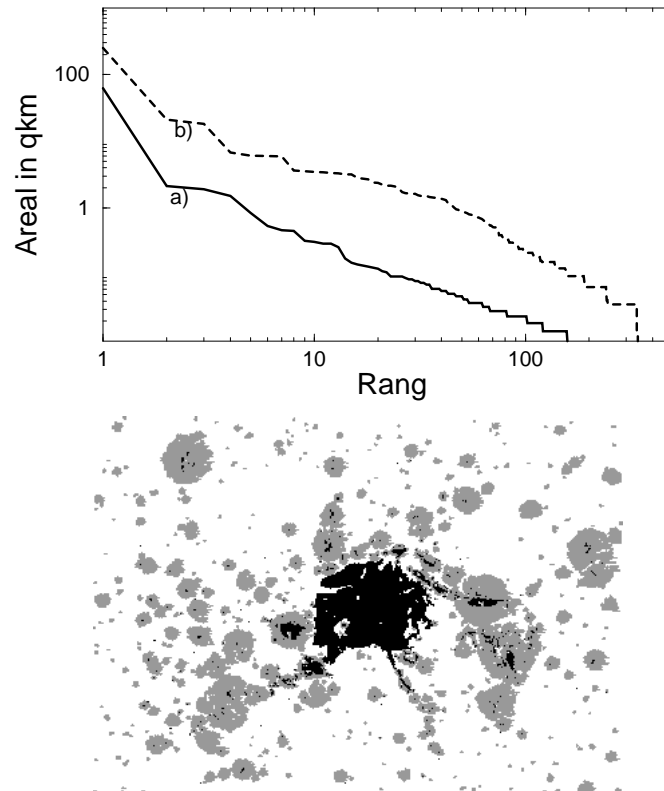


Abbildung 3: links: Simulation der Rang-Größen-Verteilung der Cluster (Daegu 1988 - 2010), rechts: Simulierte räumliche Verteilung der Cluster (Daegu 2010), Schwarz: Ausgangszustand (Daegu 1988), Grau: Simulierte Zuwachsflächen

Die Simulation der Rang-Größen-Verteilung zeigt auch für das Beispiel Daegu sehr deutlich, daß sich in Zukunft eine Annäherung an die charakteristische Pareto-Verteilung vollziehen könnte. Diese Entwicklung geht auf der räumlichen Ebene einher mit einem im Vergleich zum Zentralcluster überproportionalen Ausbau der bisher unterentwickelten Vorstädte in der Region Daegu, wodurch die Hierarchie der verschiedenen Cluster aufgefüllt wird.

## Literatur

- P. Frankhauser: Beschreibung der Evolution urbaner Systeme mit der Mastergleichung, Dissertation, Universität Stuttgart, 1991
- R. Günther, B. Shapiro, P. Wagner: Physical Complexity and Zipf's Law. *J. Theor. Phys.* **31** (1992) 525-543

- F. Schweitzer, J. Steinbrink: Die Berliner Bebauungsstruktur. In: ARCH+ Nr. 122 (Juni 1994), S. 34
- F. Schweitzer, J. Steinbrink: Urban Cluster Growth: Analysis and Computer Simulation of Urban Aggregations, In: *Self-Organization of Complex Structures: From Individual to Collective Dynamics* (Ed. F. Schweitzer), London: Gordon and Breach 1997, pp. 501-518
- F. Schweitzer, J. Steinbrink: Estimation of Megacity Growth: Simple Rules Versus Complex Phenomena, *Applied Geography* **18/1** (1998) 69-81